Logik für Linguisten

Stefan Müller

Theoretische Linguistik/Computerlinguistik
Fachbereich 10
Universität Bremen

Stefan.Mueller@cl.uni-bremen.de

7. März 2006

Propositionale Inferenz

- Wie können wir unsere semantischen Repräsentationen natürlichsprachlicher Ausdrücke dazu nutzen, Schlüsse zu ziehen?
- In diesem Abschnitt diskutieren wir das quantorenfreie Fragment der PL 1, bzw. die Aussagenlogik, wie dieses Fragment normalerweise genannt wird.
- Wir diskutieren das Tableaux-Verfahren.

Aussagenlogik

- Inferenz erster Stufe ist eine komplexe Aufgabe, weshalb wir uns der Lösung des Problems in kleinen Schritten nähren.
- Wir beginnen mit der Aussagenlogik, d. h. wir lernen etwas darüber, wie man aus mit $\neg$, $\rightarrow$, $\vee$ und $\wedge$ verknüpften Formeln schließen kann.
- Statt

  $(\textsc{dead}(\textsc{vincent}) \rightarrow \textsc{happy}(\textsc{butch})) \wedge (\neg\textsc{dead}(\textsc{vincent}) \rightarrow \textsc{happy}(\textsc{mia}))$

  schreiben wir einfach

  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$.

  Wie die Symbole intern aussehen, ist in der Aussagenlogik nicht wichtig. Wir nennen Symbole wie p, q und r Satzsymbole.

Die Tableaux-Methode

- Syntaktisch, aber auf der Grundlage klarer semantischer Intuitionen.
- Einen Tableaux-Beweis kann man unabhängig von menschlichem Verständnis finden.
- Methode kann an viele verschiedene Logiken angepaßt werden.
- Tableaux-Systeme sind mehr als nur Theorem-Beweiser: Sie können auch als Werkzeuge für den Modellbau angesehen werden.

Die Grundidee

Angenommen, wir haben einen Ausdruck und einen der beiden Wahrheitswerte TRUE *bzw.* FALSE*. Ist es möglich, ein Modell zu finden, in dem der Ausdruck den gegebenen Wahrheitswert hat?*

Die Tableaux-Methode ist im wesentlichen ein *syntaktisches* Verfahren, *systematisch* zu überprüfen, ob das möglich ist, oder nicht.

Es gibt uns einen systematischen Gültigkeitstest.
Die gültigen Ausdrücke sind die,
die die Tableaux-Methode *nicht* widerlegen kann.

Das Tableaux-Verfahren ist also ein indirektes Verfahren:
Um ϕ zu beweisen, geben wir $\neg\phi$ ein und zeigen,
daß das zum Widerspruch führt.

Beispiel 1: Beweis einer Disjunktion

Der Ausdruck $p \vee \neg p$ ist gültig.
Wie würde eine systematische Suche nach einer Widerlegung aussehen?

Eine mögliche Antwort: Fülle die Wahrheitstabelle aus.

Aber das würde nicht für PL 1 funktionieren und wäre ohnehin nur für nicht-komplexe Ausdrücke praktikabel.

Stattdessen entwickeln wir *Tableaux-Erweiterungsregeln*.

Notationskonventionen

$$F(p \vee \neg p).$$

- Das ist unser erstes Tableau!
- Das 'F'-Präfix bedeutet, daß wir $p \vee \neg p$ widerlegen wollen.
- Wenn man ein Tableau mit der Hand aufschreibt, ist es praktisch, Zusatzinformation aufzuschreiben, wie z. B. Zeilennummern:

$$1 \quad F(p \vee \neg p)$$

Tableauerweiterung mit der Disjunktionsregel

$$\begin{array}{lcl} 1 & F(p \vee \neg p) & \surd \\ 2 & Fp & 1, F_{\vee} \\ 3 & F\neg p & 1, F_{\vee} \end{array}$$

- Unser zweites Tableau!
- Es verwendet eine Tableau-Erweiterungsregel, die $F_{\vee}$ (*widerlege Disjunktion*) genannt wird, um den Ausdruck in Zeile 1 in zwei Teile zu zerlegen.
- Das $\surd$-Symbol in Zeile 1 zeigt, daß wir die entsprechende Regel auf Zeile 1 angewendet haben. (Wir müssen niemals Regeln zweimal auf eine Zeile anwenden)

Tableauerweiterung mit der Negationsregel

1	$F(p \vee \neg p)$	$\surd$
2	Fp	$1, F_\vee$
3	$F\neg p$	$1, F_\vee, \surd$
4	Tp	$3, F_\neg.$

- Wir haben die Expansionsregel $F_\neg$ (*widerlege eine Negation*) verwendet.
- Wir sind fertig! Das Tableau ist **regelgesättigt**,
  d. h. wir können keine weiteren Regeln mehr anwenden.
- Das Tableau ist außerdem **geschlossen**,
  da es einen Konflikt zwischen den Zeilen 2 und 4 gibt.

Deshalb ist $p \vee \neg p$ gültig.

Beispiel 2: Tableauerweiterung mit der Implikationsregel

Ist $\neg(q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$ gültig? Mal sehen ...

$$1 \quad F\neg(q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$$

Wir benutzen die Regel $F_\rightarrow$, die uns sagt, wie wir Implikationen widerlegen.

1	$F\neg(q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$	$\surd$
2	$T\neg(q \wedge r)$	$1, F_\rightarrow$
3	$F(\neg q \vee \neg r)$	$1, F_\rightarrow$

Für die Zeile 3 müssen wir eine *Disjunktion widerlegen*.
Wir benutzen $F_\vee$ ...

Tableauerweiterung mit der Disjunktionsregel

1	$F\neg(q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$	$\surd$
2	$T\neg(q \wedge r)$	$1, F_\rightarrow$
3	$F(\neg q \vee \neg r)$	$1, F_\rightarrow, \surd$
4	$F\neg q$	$3, F_\vee$
5	$F\neg r$	$3, F_\vee$

Wieso durften wir an Zeile 3 arbeiten?
Wir haben doch Zeile 2 noch nicht behandelt!

Kein Problem!
Wir können uns aussuchen, wo wir arbeiten.
(einer der Vorteile von Tableaux)

Tableauerweiterung mit der Negationsregel

1	$F\neg(q \wedge r) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$	$\surd$
2	$T\neg(q \wedge r)$	$1, F_\rightarrow$
3	$F(\neg q \vee \neg r)$	$1, F_\rightarrow, \surd$
4	$F\neg q$	$3, F_\vee, \surd$
5	$F\neg r$	$3, F_\vee, \surd$
6	Tq	$4, F_\neg$
7	Tr	$5, F_\neg$
8	$F(q \wedge r)$	$2, T_\neg$

Jetzt müssen wir uns mit Zeile 8 auseinandersetzen.
Das wird interesant ...

Tableauerweiterung mit der Konjunktionsregel

1	$F\neg(q \wedge r) \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$	$\surd$
2	$T\neg(q \wedge r)$	$1, F_{\rightarrow}, \surd$
3	$F(\neg q \wedge \neg r)$	$1, F_{\rightarrow}, \surd$
4	$F\neg q$	$3, F_{\vee}, \surd$
5	$F\neg r$	$3, F_{\vee}, \surd$
6	Tq	$4, F_{\neg}$
7	Tr	$5, F_{\neg}$
8	$F(q \wedge r)$	$2, T_{\neg}, \surd$

9 Fq 8, $F_{\wedge}$ | 10 Fr 8, $F_{\wedge}$

Beispiel 3: Ein ungültiger Ausdruck

Was passiert, wenn der Ausdruck, mit dem wir arbeiten, *nicht* gültig ist?

Z. B. : $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

1 $F(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

Wir müssen eine Implikation widerlegen,
also benutzen wir die Regel $F_{\rightarrow}$ …

Implikations- und Konjunktionsregel

1	$F(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	$\surd$
2	$T(p \wedge q)$	$1, F_{\rightarrow}, \surd$
3	$F(r \vee q)$	$1, F_{\rightarrow}$
4	Tp	$2, T_{\wedge}$
5	Tq	$2, T_{\wedge}$

Zeile zwei verlangt, daß wir eine Konjunktion wahr machen.
Wir benutzen die Expansionsregel $T_{\wedge}$.

Disjunktionsregel

1	$F(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	$\surd$
2	$T(p \wedge q)$	$1, F_{\rightarrow}, \surd$
3	$F(r \vee s)$	$1, F_{\rightarrow}, \surd$
4	Tp	$2, T_{\wedge}$
5	Tq	$2, T_{\wedge}$
6	Fr	$3, F_{\vee}$
7	Fs	$3, F_{\vee}$

Nun zu Zeile 3. Die relevante Regel ist $F_{\vee}$.

Wir sind fertig – aber das Tablau ist nicht geschlossen, es ist **offen**.
Somit ist der Ausdruck *nicht* gültig.

Wir können ein (aussagenlogisches) Modell aus dem Tablau auslesen.

Expansionsregeln für Negation

$$\frac{T\neg\phi}{F\phi} \qquad \frac{F\neg\phi}{T\phi}$$

- Man lese diese Regeln von oben nach unten.
  Der markierte Ausdruck über der horizontalen Linie ist
  die *Eingabe* für die Regel, und der Ausdruck darunter ist die *Ausgabe*.
- Wir nennen solche Regeln *unäre Regeln*,
  da sie nur einen Ausdruck als Ausgabe liefern.

Expansionsregeln für binäre Verknüpfungen

$$\frac{T(\phi \wedge \psi)}{\begin{array}{c} T\phi \\ T\psi \end{array}} \qquad \frac{F(\phi \wedge \psi)}{F\phi \mid F\psi}$$

$$\frac{F(\phi \vee \psi)}{\begin{array}{c} F\phi \\ F\psi \end{array}} \qquad \frac{T(\phi \vee \psi)}{T\phi \mid T\psi}$$

$$\frac{F(\phi \rightarrow \psi)}{\begin{array}{c} T\phi \\ F\psi \end{array}} \qquad \frac{T(\phi \rightarrow \psi)}{F\phi \mid T\psi}$$

Aussagentableaux

- Ein (Aussagen-)*Tableaux* ist ein Baum, dessen Knoten markierte aussagenlogische Ausdrücke sind.
  Ein *Zweig* eines Tableaux ist ein Zweig eines solchen Baumes.
- Wir beginnen mit einem *Anfangstableaux*.
  Das kann irgendein Tableaux mit genau einem Zweig sein.
- Tableaux-Expansion funktioniert wie folgt:
  Gegeben ein Tableaux: Versuche einen Knoten zu finden, der
  - kein markierter atomarer Ausdruck ist und
  - auf den noch keine Expansionsregel angewendet wurde.

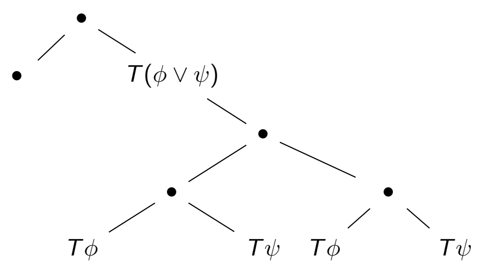
  Solche Knoten werden *unexpandierte Knoten* genannt.

Aussagentableaux

- Wenn es keine expandierbaren Knoten mehr gibt, halte an!
  Das Tableau ist regelgesättigt.
- Wenn das Tableau unexpandierte Knoten enthält,
  wähle einen und wende die entsprechenden Expansionsregeln an,
  d. h. erweitere das Tableaux durch das Hinzufügen neuer Knoten,
  so wie es die Regel vorschreibt.

Anmerkung

Ein markierter Ausdruck kann zu mehreren Zweigen gehören.
Wenn wir eine Expansion vornehmen,
müssen wir *alle* Zweige, an denen die Eingabeformel verfügbar ist, erweitern.



Wenn wir $T(\phi \vee \psi)$ erweitern,
müssen $T\phi$ und $T\psi$ an allen Verzeigungen eingesetzt werden.

Geschlossene und offene Tableaux

- Ein Zweig eines Tableaux ist **geschlossen**, wenn er sowohl $T\phi$ als auch $F\phi$ enthält, wobei ϕ ein Ausdruck ist.
- Ein Zweig, der nicht geschlossen ist, wird **offen** genannt.
- Ein Tableau ist geschlossen, wenn *alle* Zweige, die es enthält, geschlossen sind. Es ist offen, wenn *mindestens ein* Zweig offen ist.

Die Hauptdefinition

Ein Ausdruck ϕ ist **Tableaux-beweisbar** (oder einfacher *beweisbar*) gdw. es möglich ist, das initiale Tableaux, das nur aus dem Knoten $F\phi$ besteht, in ein geschlossenes Tableaux zu expandieren.

Wenn ϕ beweisbar ist, schreibt man $\vdash \phi$.

Inferenz für PL 1

- Jetzt diskutieren wir Inferenz für PL 1.
- Wir zeigen zuerst, wie wir unser aussagenlogisches Tableau-System für Sprachen erster Stufe erweitern können.

Die Hauptsache

- Es ist einfach, unser propositionales Tableaux-System zu einem (korrekten und vollständigen) Tableaux-System für PL 1 zu erweitern.
- Es ist sehr viel schwerer, das so zu tun, daß man eine effiziente Computerimplementation bekommt.

PL1-Tableaux

Grundidee: Tableaux-Regeln elemenieren Quantoren und wandeln so PL1-Formeln in propositionale Formeln um. Hier sind die ersten beiden **universellen** Regeln, die wir brauchen:

$$\frac{T\forall x\phi}{T\phi(\tau)} \qquad \frac{F\exists x\phi}{F\phi(\tau)}$$

Dabei steht $\phi(t)$ für das Ergebnis der Ersetzung der Variable, die durch den Quantor gebunden wird, durch den geschlossenen Term t.

Aus $T\forall x\textsc{killer}(x)$ können wir $T\textsc{killer}(\textsc{jules})$, $T\textsc{killer}(\textsc{butch})$, usw. schließen.

Ein Beispiel

Wir zeigen die Gültigkeit von $\forall x(\textsc{die}(x) \rightarrow \textsc{die}(\textsc{mia}) \wedge \textsc{die}(\textsc{zed}))$

1	$F(\forall x\textsc{d}(x) \rightarrow \textsc{d}(\textsc{m}) \wedge \textsc{d}(\textsc{z}))$	$\surd$
2	$T\forall x\textsc{d}(x)$	1, $F_\rightarrow$
3	$F(\textsc{d}(\textsc{m}) \wedge \textsc{d}(\textsc{z}))$	1, $F_\rightarrow$, $\surd$
4	$T\textsc{d}(\textsc{m})$	2, $T_\forall$
5	$T\textsc{d}(\textsc{z})$	2, $T_\forall$

6 $F\textsc{d}(\textsc{m})$ 3, $F_\wedge$	7 $F\textsc{d}(\textsc{z})$ 3, $F_\wedge$

Man beachte, daß wir $T_\forall$ auf Zeile 2 zwei Mal angewendet haben.

Was für Tableaux-Regeln braucht man für Formeln der Form $T\exists x\phi$ oder $F\forall x\phi$? Das ist eine knifflige Angelegenheit.

- Angenommen, das Tableau enthält die Formel $T\exists x\textsc{killer}(x)$.
- Es ist nicht angemessen aufgrund dieser Information zu schließen, daß $T\textsc{killer}(\textsc{jules})$ oder $T\textsc{killer}(\textsc{butch})$ oder sogar $T\textsc{killer}(\textsc{closed-term})$ für *jeden* geschlossenen Term der Sprache, mit der wir arbeiten gilt.
- Wir werden deshalb einen neuen Bezeichner (*Parameter* genannt) einführen und den Quantor eliminieren, indem wir diesen einsetzen (d. h., wir arbeiten mit einer mächtigeren Sprache).

Die existentiellen Regeln

Hier sind $F_\forall$ und $T_\exists$:

$$\frac{F\forall x\phi}{F\phi(c)} \qquad \frac{T\exists x\phi}{T\phi(c)}$$

Hierbei steht $\phi(c)$ für das Ergebnis der Substitution eines Parameters c, **den wir bisher nicht im Tableau-Beweis benutzt haben**, für die neu eleminierte Variable in der Matrix.

- Es ist wichtig, daß wir neue Parameter benutzen.
- Anmerkung: Die universellen Regeln müssen ebenfalls in der Lage sein, Parameter zu verwenden! Das heißt, daß die universellen Regeln unendlich viele Möglichkeiten zulassen.

Ein Beispiel

Wir zeigen, daß $\exists x \forall y \textsc{shoots}(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \textsc{shoots}(x,y)$ gültig ist.
(Dieses Beispiel zeigt die Anwendung von allen vier Quantorenregeln)

1	$F(\exists x \forall y \textsc{shoots}(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \textsc{shoots}(x,y))$	$\surd$
2	$T\exists x \forall y \textsc{shoots}(x,y)$	1, $F_\rightarrow$
3	$F\forall y \exists x \textsc{shoots}(x,y)$	1, $F_\rightarrow$
4	$T\forall y \textsc{shoots}(c_1, y)$	2, $T_\exists$
5	$F\exists x \textsc{shoots}(x, c_2)$	3, $F_\forall$
6	$T\textsc{shoots}(c_1, c_2)$	4, $T_\forall$
7	$F\textsc{shoots}(c_1, c_2)$	5, $F_\exists$

Man beachte die Interaktion der existentiellen und universellen Regeln.
Univerelle Regeln können auf Parameter zugreifen.

Blackburn, Patrick und Bos, Johan. 2005. *Representation and Inference for Natural Language. A First Course in Computational Semantics*. Stanford: CSLI Publications.

von Kutschera, Franz und Breitkopf, Alfred. 2000. *Einführung in die moderne Logik*. Alber Studienbuch, Freiburg/München: Verlag Karl Alber, 7. Auflage.